

**Maturità scientifica, corso di ordinamento, sessione ordinaria 2000-2001**

**PROBLEMA 1**

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali  $x, y$ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove  $a$  è un parametro reale positivo.

- a) Esprimere  $y$  in funzione di  $x$  e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- b) Determinare per quali valori di  $a$  la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta  $t$  di equazione  $x+y=4$ .
- c) Scrivere l'equazione della circonferenza  $k$  che ha il centro nel punto di coordinate  $(1,1)$  e intercetta sulla retta  $t$  una corda di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .
- d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da  $k$  è diviso dalla retta  $t$ .
- e) Determinare per quale valore del parametro  $a$  il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza  $k$ .

**Soluzione**

**Punto a**

Esprimere  $y$  in funzione di  $x$  e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

La relazione  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ , con  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$  è definita per  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ .

Esprimendo  $y$  in funzione di  $x$  si ottiene  $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-a}{ax}$ , in conclusione

$$y(x) = \frac{ax}{x-a}$$

Si tratta di una famiglia di funzioni omografiche passanti per  $O(0,0)$ , che però non appartiene al dominio della funzione.

Asintoto verticale  $x = a$ .

Asintoto orizzontale  $y = a$ .

Centro di simmetria  $C(a,a)$ .

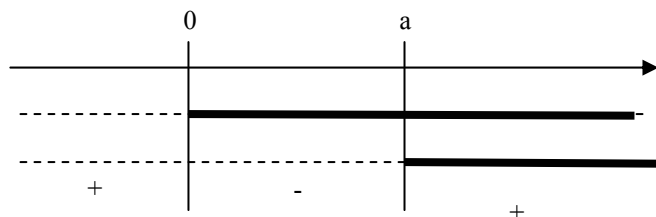
Asse focale  $y=x$ .

I vertici della funzione omografica si ottengono facendo l'intersezione dell'asse focale con la funzione:  $O(0,0) \notin D, V(2a, 2a)$

Segno della funzione  $y = \frac{ax}{x-a}$

$$y \geq 0 \leftrightarrow x \leq 0 \vee x > a$$

$$y < 0 \leftrightarrow 0 < x < a$$



## Studio dei limiti

1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{ax}{x-a} = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a} = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x-a} = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x-a} = a^+$

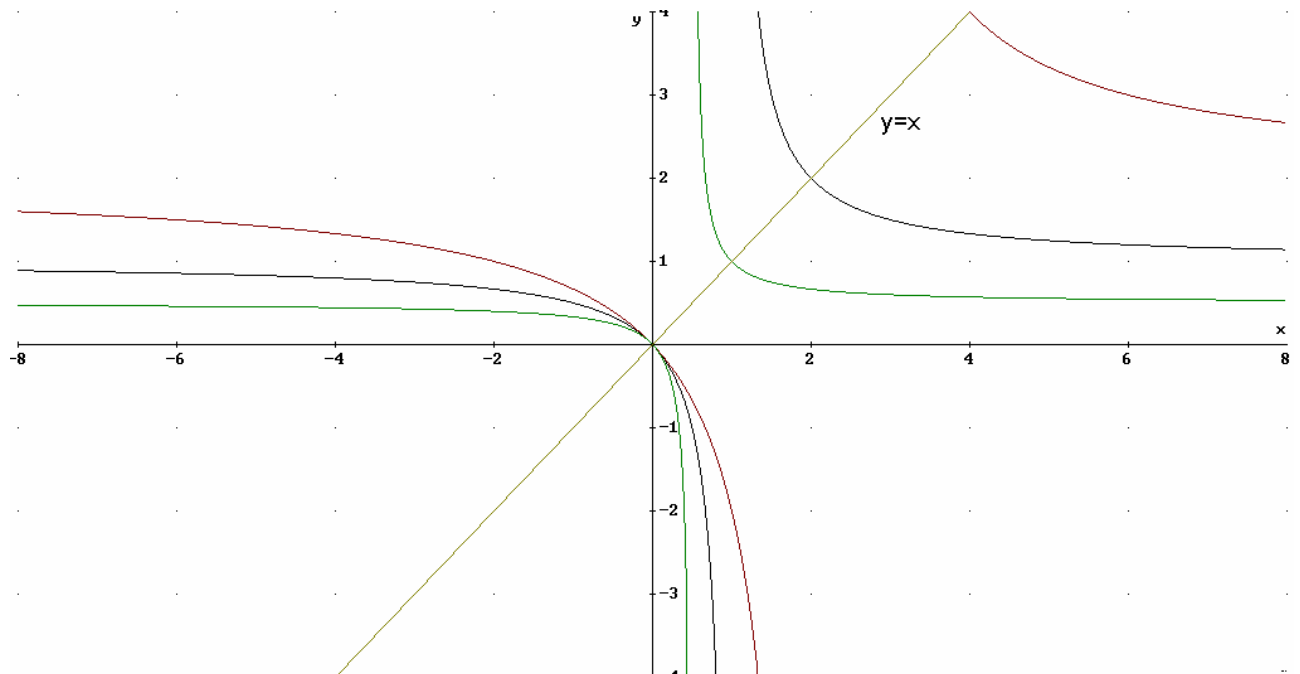
5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{x-a} = a^-$

I primi due limiti confermano che la retta  $x=a$  è un asintoto *verticale a destra e a sinistra*.  
Il terzo limite permette di affermare che la funzione è prolungabile per continuità nel punto di ascissa  $x=0$ .

Il quarto e quinto limite confermano che la retta  $y=a$  è un asintoto *orizzontale a destra e a sinistra*.

Inoltre essendo la derivata prima  $y' = -\frac{a^2}{(x-a)^2}$  sempre negativa, nel suo campo di

esistenza  $\mathcal{R} - \{0, a\}$ , la funzione è decrescente in ciascun intervallo dove è definita e non ammette punti né di massimo né di minimo.



**Punto b**

Determinare per quali valori di  $a$  la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta  $t$  di equazione  $x+y=4$ .

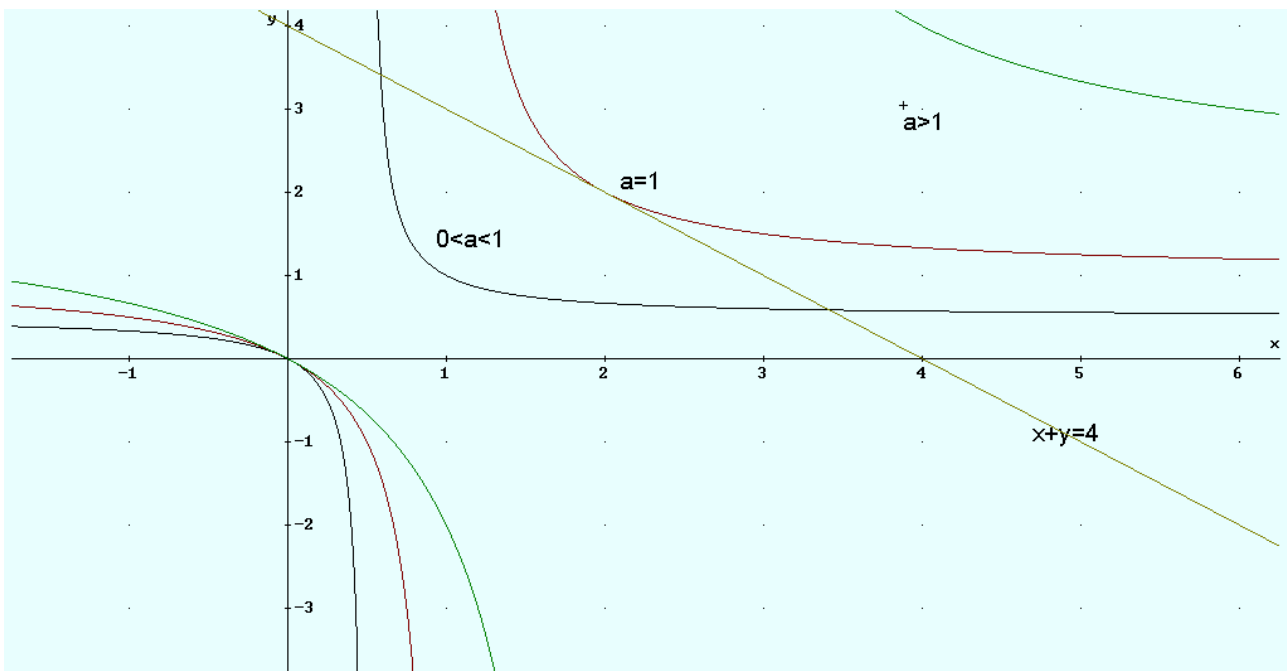
Ponendo il sistema tra l'equazione della funzione e quella della retta data si ottiene:

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{x-a} \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4-x)(x-a) = ax \\ y = 4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4a = 0 \\ y = 4-x \end{cases}$$

L'equazione  $x^2 - 4x + 4a = 0$  ha  $\Delta = 16 - 16a$ ,

Pertanto:

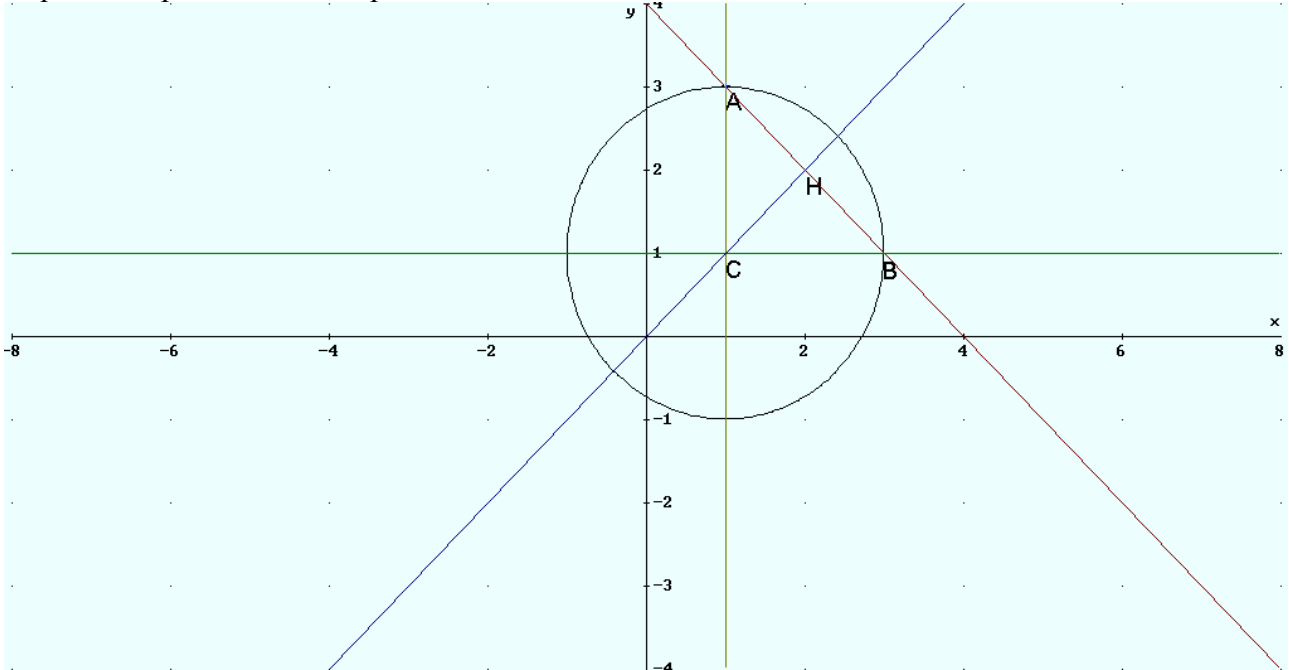
- ci sono due soluzioni coincidenti per  $a = 1$  (la retta è tangente alla funzione);
- e due soluzioni distinte per  $0 < a < 1$  (in tal caso la retta è secante);
- nessuna soluzione per  $a > 1$  (la retta è esterna).



**Punto c**

Scrivere l'equazione della circonferenza  $k$  che ha il centro nel punto di coordinate  $(1,1)$  e intercetta sulla retta  $t$  una corda di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .

Il quesito si può risolvere in più modi.



Si calcola la distanza  $\overline{CH}$  del centro dalla retta (distanza punto retta)  $\overline{CH} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$

Poiché  $\overline{CH} = \overline{AH} = \sqrt{2}$ , Il triangolo CHA è rettangolo isoscele e quindi il raggio CA della circonferenza che è l'ipotenusa del triangolo CHA misura 2.

Per calcolare il raggio della circonferenza  $K$  si può procedere anche nel seguente modo.

1. Si scrive l'equazione del fascio di circonferenze di centro  $C(1,1)$  e raggio  $r$
2. Si interseca il fascio ottenuto con la retta  $y=-x+4$
3. Si trovano i punti di intersezione  $A$  e  $B$ , in funzione del parametro  $r$
4. Si impone la condizione che la corda  $AB$  sia di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .

1. Equazione del fascio di circonferenze di centro  $C(1,1)$  e raggio  $r$ :  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$
2. Intersezione del fascio con la retta  $y=-x+4$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 - r^2 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_A = 2 - \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \\ y_A = 2 + \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2 + \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \\ y_B = 2 - \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \end{cases}$$

3. I punti di intersezione  $A$  e  $B$ , in funzione del parametro  $r$ , sono:

$$A \left( 2 - \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \right) \quad B \left( 2 + \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2}; 2 - \frac{\sqrt{2r^2 - 4}}{2} \right)$$

la lunghezza della corda  $AB = \sqrt{2(2r^2 - 4)}$

4. Imponendo la condizione che la corda AB sia di lunghezza  $2\sqrt{2}$  si ottiene

$$\sqrt{2(2r^2 - 4)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r^2 - 2 = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r_{1/2} = \pm 2$$

scartando la soluzione negativa, si ha  $r = 2$

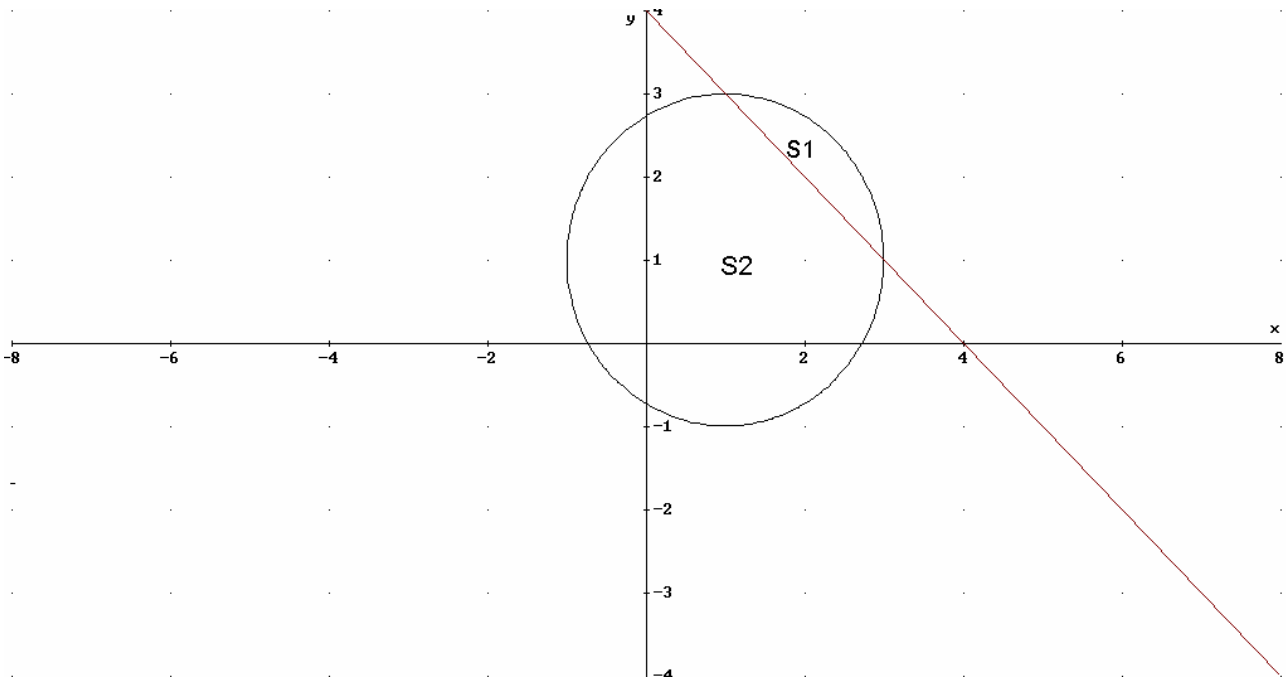
Quindi l'equazione della circonferenza K richiesta è  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ , da cui

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

I punti di intersezione sono A(1,3) B(3,1).

**Punto d**

Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.



L'area S1 del segmento circolare, che si trova al di sopra della retta, si può calcolare come differenza tra il settore circolare  $\widehat{ABC}$  e l'area del triangolo ABC.

$$S_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$$

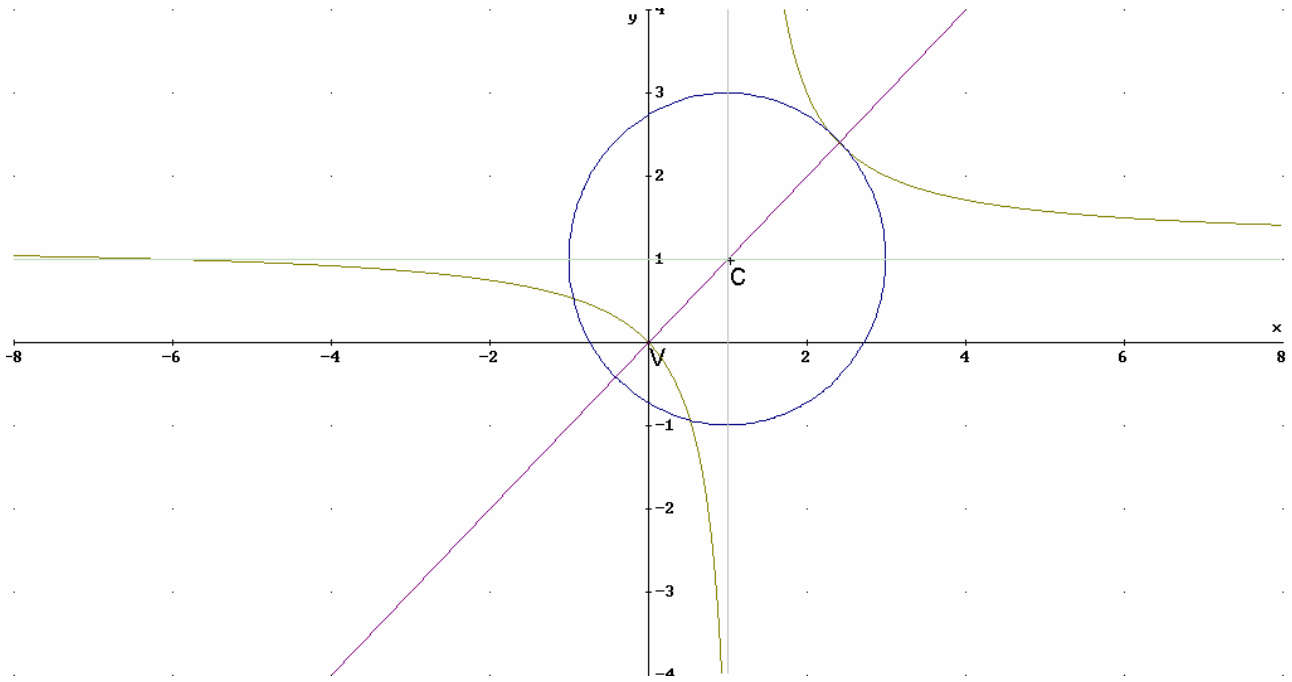
$$S_1 = \pi - 2$$

L'area S2 del segmento circolare di area maggiore si può calcolare come differenza tra l'area del cerchio e l'area S1:  $S_2 = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2$

**Punto e**

Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

Tenendo conto che la retta che unisce i vertici dell'iperbole, passa per il centro C della circonferenza K, le due curve sono tangenti quando la distanza tra il centro C(1,1) e il vertice V (2a;2a) risulta uguale al raggio  $r = 2$  della circonferenza K.



Basta imporre la condizione  $\overline{CV} = 2$

$$\overline{CV} = \sqrt{(2a-1)^2 + (2a-1)^2}$$

$$\sqrt{(2a-1)^2 + (2a-1)^2} = 2 \Rightarrow (2a-1)^2 + (2a-1)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$4a^2 - 4a - 1 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

La soluzione negativa è da escludere perché, per ipotesi,  $a > 0$ . Quindi  $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$