

Maturità Scientifica PNI, sessione ordinaria 2000-2001**Problema 1**

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.

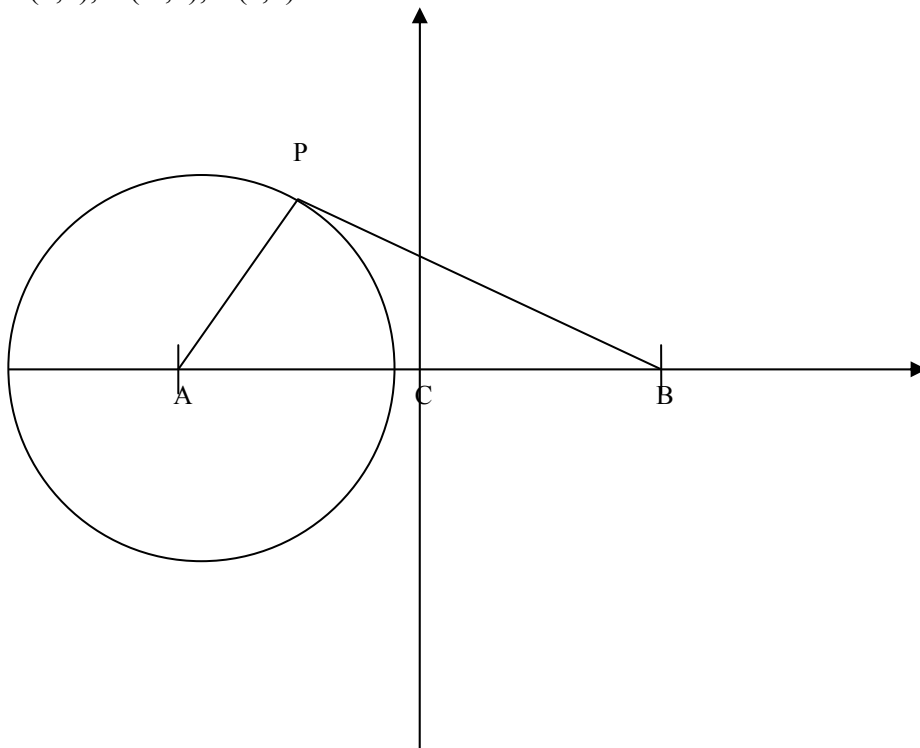
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) :

- A. Si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.
- B. Si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45° .
- C. Posto X , appartenente a γ , in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo \widehat{XAC} si illustri l'andamento della funzione $y = f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e $x = \text{tg } \alpha$.

Soluzione**Punto A**

Si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.

Si fissa un sistema di assi cartesiani di origine C e con il segmento AB sull'asse delle x . Si ha $C(0,0)$, $A(-a,0)$, $B(a,0)$.



Posto $P(x, y)$, il luogo dei punti cercato si ottiene dalla relazione $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = k^2$, da cui, osservando che

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2 [(x-a)^2 + y^2] \Rightarrow$$

$$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + 2a(1+k^2)x + a^2(1-k^2) = 0$$

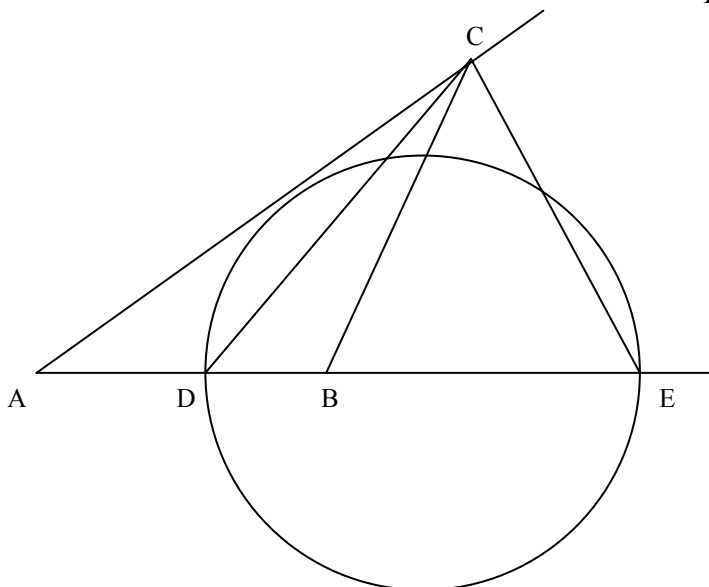
Per $k=1$ l'equazione degenera nell'equazione di una retta e precisamente $4ax=0$, ossia $x=0$.

Per $k \neq 1$ si ha l'equazione di una circonferenza di centro $C\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2}, 0\right)$ e raggio $r = \frac{2ak}{|1-k^2|}$.

Circonferenza di Apollonio (da Apollonio di Perge, vissuto tra il 265 e il 170 a.C.) relativa a due punti fissi A e B e un numero positivo k è il luogo dei punti P per i quali $\overline{AP} = k\overline{BP}$. Questo luogo corrisponde a una circonferenza che ha un diametro sulla retta AB .

Circonferenza di Apollonio relativa a un triangolo ABC è, invece, quella che ha per diametro il segmento DE , dove D è il punto in cui la bisettrice all'angolo interno in C interseca il lato AB , mentre E è il punto in cui la bisettrice dell'angolo esterno in C incontra il prolungamento del lato

AB . I punti $ABDE$ formano un gruppo armonico, ossia $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

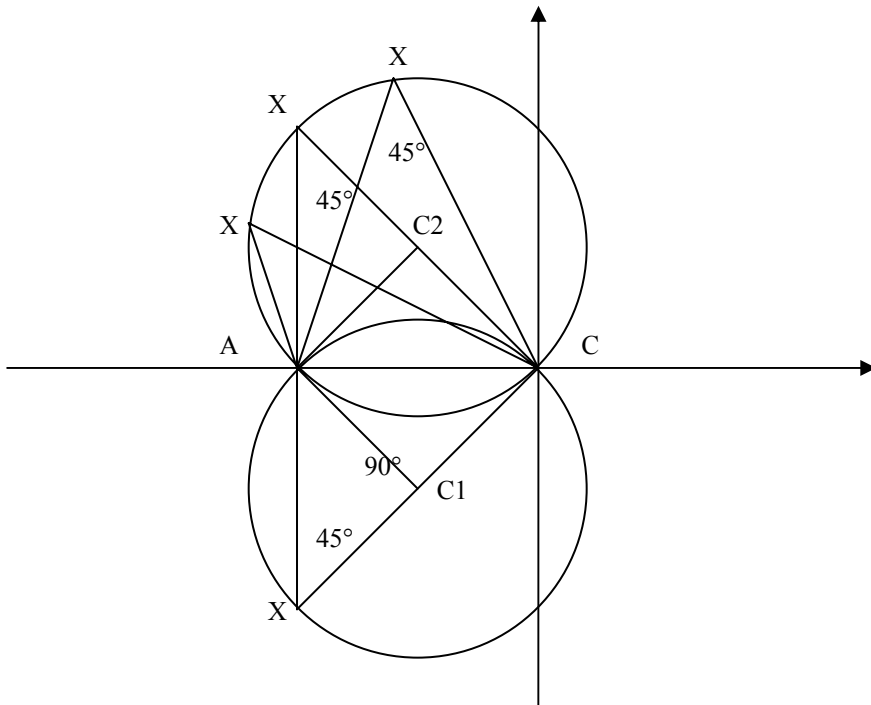


Cerchio di Apollonio relativo a un triangolo

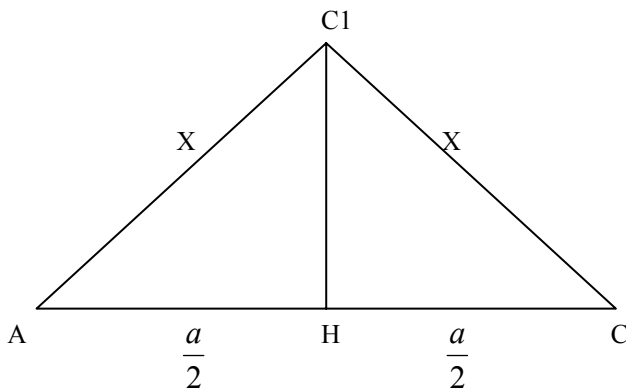
Punto B

Si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45° .

Il luogo dei punti X è costituito da due archi di circonferenza che hanno AC come corda. Infatti X è il vertice di angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AC .



L'angolo al centro $\widehat{AC_1C} = 90^\circ$ perché l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza $\widehat{AXC} = 45^\circ$. Il triangolo AC_1C è un triangolo rettangolo isoscele.



Dal teorema di Pitagora $x^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, dove x è il raggio della circonferenza.

Anche il triangolo C_1HC è rettangolo isoscele, per cui $C_1H = \frac{a}{2}$.

La circonferenza γ_1 ha centro $C_1\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

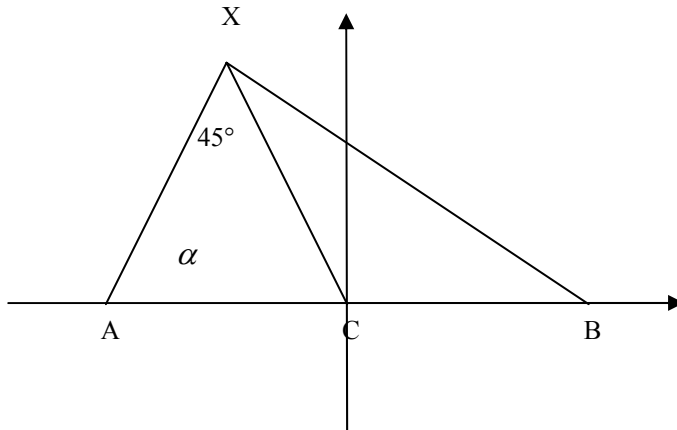
La circonferenza γ_2 ha centro $C_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Il luogo geometrico è quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \\ y < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Punto C

Posto X , appartenente a γ , in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo \widehat{XAC} si illustri l'andamento della funzione $y = f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e $x = \text{tg } \alpha$.



$$\widehat{XAC} = \alpha$$

$$\widehat{AXC} = 45^\circ$$

$$\widehat{XCA} = 135^\circ - \alpha$$

Per il teorema dei seni $\frac{\overline{XA}}{\text{sen}(135^\circ - \alpha)} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow \overline{XA} = \frac{2a}{\sqrt{2}} \text{sen}(135^\circ - \alpha)$, applicando le formule di sottrazione si ottiene $\overline{XA} = a(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$.

Per il teorema di Carnot

$$\begin{aligned} \overline{XB}^2 &= \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{XA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\alpha = \\ &= a^2(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + 4a^2 - 2a(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)2a\cos\alpha = \\ &= a^2(5 - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2} = \frac{5 - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha}$$

dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ si

ha

$$f(x) = \frac{\frac{5}{\cos^2\alpha} - 2\text{tg}\alpha - 4}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 2\text{tg}\alpha}$$

tenendo presente la formula $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$ e ponendo $\text{tg}\alpha = x$ si ha

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}$$

Geometricamente si ha la seguente limitazione $0 < \alpha < 135^\circ$, da cui $x < -1$ o $x > 0$.

Studiamo la funzione indipendentemente dai limiti geometrici della variabile.

Dominio: $1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-1\}$

Studio del segno e intersezione con gli assi:

$f(x) > 0$ per ogni x , infatti il trinomio $5x^2 - 2x + 1$ ha $\Delta = 4 - 20 < 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \left. \begin{matrix} y = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \right\} \text{nessuna soluzione}$$

Studio dei limiti negli estremi del dominio:

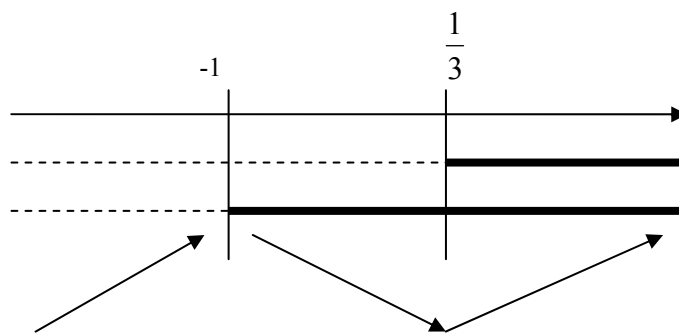
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 5$$

Quindi la retta $x=-1$ è asintoto verticale per la funzione, la retta $y=5$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Studio della derivata

$$f'(x) = \frac{4(3x-1)}{(x+1)^3} \geq 0$$

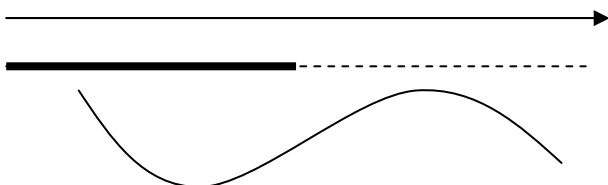


$M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

Studio della derivata seconda

$$f''(x) = \frac{24(1-x)}{(x+1)^4} \geq 0$$

1



$F(1,1)$ è punto di flesso per la funzione.

Grafico

