Problema 2
Si considerino le lunghezze seguenti

[1] $a+2x,\qquad a-x,\qquad 2a-x$

dove a è una grandezza nota non nulla e x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.
c) Verificato che per x=a/4 le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descrivere la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

Soluzione

Punto a

Posto

$l_1 = a+2x,\qquad l_2 = a-x,\qquad l_3 = 2a-x$

l_1, l_2 , l_3 rappresentano delle lunghezze, quindi devono essere quantità positive, da cui la condizione 1); siccome in un triangolo non degenere la differenza di due lati è sempre minore del terzo lato si ha la condizione 2); la somma di due lati è sempre maggiore del terzo dà la condizione 3) (disuguaglianze triangolari); in realtà la condizione 2) è equivalente alla condizione 3).
Imponendo le condizioni 1), 2) e 3) si ottiene:

$$1)\begin{cases} l_1 > 0 \\ l_2 > 0 \\ l_3 > 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} l_1 + l_2 > l_3 \\ l_2 + l_3 > l_1 \\ l_3 + l_1 > l_2 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} l_1 - l_2 < l_3 \\ l_2 - l_3 < l_1 \\ l_3 - l_1 < l_2 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} a + 2x > 0 \\ a - x > 0 \\ 2a - x > 0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a + 2x + a - x > 2a - x \\ a - x + 2a - x > a + 2x \\ 2a - x + a + 2x > a - x \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a + 2x - a + x < 2a - x \\ a - x - 2a + x < a + 2x \\ 2a - x - a - 2x < a - x \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} x > -\dfrac{a}{2} \\ x < a \\ x < 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} se \quad a > 0 \quad -\dfrac{a}{2} < x < a \\ se \quad a < 0 \qquad \phi \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x > 0 \\ x < \dfrac{a}{2} \\ x > -a \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$3)\begin{cases} x < \dfrac{a}{2} \\ x > -a \Rightarrow 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

Riassumendo $\boxed{0 < x < \frac{a}{2}}$.

Punto b

Per determinare l'area del triangolo i cui lati hanno lunghezze:

$l_1 = a+2x$, $l_2 = a-x$, $l_3 = 2a-x$

applichiamo la formula di Erone

$$A = \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_2)}$$

dove p è il semiperimetro. Sostituendo i valori si ottiene

$$A(x) = \sqrt{2ax(a-2x)(a+x)}$$

La ricerca dei massimi e minimi deve essere effettuata nell'intervallo $\left]0;\frac{a}{2}\right[$

Occorre studiare il segno della derivata prima del radicando R(x)=2ax(a-2x)(a-x), infatti, i massimi e i minimi di A(x) avranno la stessa ascissa dei massimi e minimi del radicando R(x).

Derivando R(x) si ottiene: $R'(x) = 2a\left(-6x^2 - 2ax + a\right)$

Ponendo R'(x)≥0 si ottiene:

$$6x^2 + 2ax - a \leq 0 \Rightarrow \frac{-a - a\sqrt{7}}{6} \leq x \leq \frac{-a + a\sqrt{7}}{6}$$

Osserva che

$$\frac{-a + a\sqrt{7}}{6} \in \left]0;\frac{a}{2}\right[\quad mentre \quad \frac{-a - a\sqrt{7}}{6} \notin \left]0;\frac{a}{2}\right[$$

L'area del triangolo assumerà il valore massimo per

$$x = \frac{-a + a\sqrt{7}}{6} \in \left]0;\frac{a}{2}\right[$$

Punto c

Per x = a/4 le lunghezze assegnate sono lati di un triangolo non degenere perché

$$\frac{a}{4} \in \left]0;\frac{a}{2}\right[$$

per tale valore le lunghezze dei lati valgono:

$$l_1 = \frac{3}{2}a \quad ; \quad l_2 = \frac{3}{4}a \quad ; l_3 = \frac{7}{4}a \quad ;$$

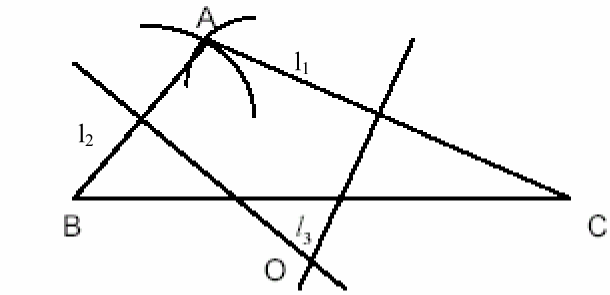
la costruzione geometrica del triangolo può essere fatta con il compasso, tenendo presente che i tre lati sono proporzionali ai numeri 6,3,7.

Consideriamo $l_1 = 6cm. \quad ; \quad l_2 = 3cm. \quad ; l_3 = 7cm. \quad ;$

poniamo BC = l_3 =7cm.

Puntiamo il compasso in B e tracciamo un arco di raggio l_2 =3cm. Puntando poi il compasso in C tracciamo un arco di raggio l_1 =6cm.

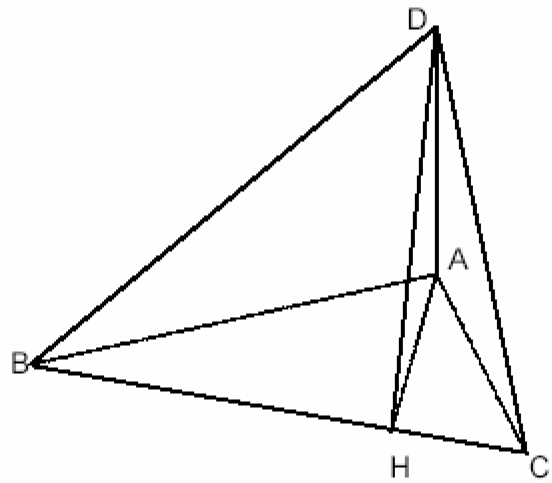
Detto A il punto comune ai due archi si può costruire il triangolo ABC cercato.



Il centro O della circonferenza circoscritta è data dagli assi dei lati AB=l_2 e AC=l_2 .
Il triangolo è ottusangolo perché (come si vede dalla figura) il centro O della circonferenza è esterno al triangolo .

Punto d

Considerato il triangolo ABC della figura precedente conduciamo per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e prendiamo su di essa un punto D tale che AD sia lungo a; si ottiene il tetraedro in figura.



Per determinare l'ampiezza dell'angolo formato dai piani ABC e DBC calcola la misura dell'angolo α formato da DH e AH, dove AH è l'altezza relativa al lato BC.

Osserva che $tg\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AH}}$ e $\overline{AH} = \dfrac{2\cdot A}{\overline{BC}}$

$$A\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{2a\cdot\frac{a}{4}\left(a-2\cdot\frac{a}{4}\right)\left(a+\frac{a}{4}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$$

Ottieni $\overline{AH} = \dfrac{2\cdot A}{\overline{BC}} = \dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot a^2}{\frac{7}{4}a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{7}a$

quindi $tg\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \dfrac{a}{\frac{2\sqrt{5}}{7}a} = \dfrac{7}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = arctg\dfrac{7}{2\sqrt{5}} = 1{,}002(rad) = (57{,}43..)^0$