Maturità Scientifica PNI Sessione ordinaria 2001-2002

Problema 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale *a* non nullo.
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y):

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di *a*;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x,y) che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

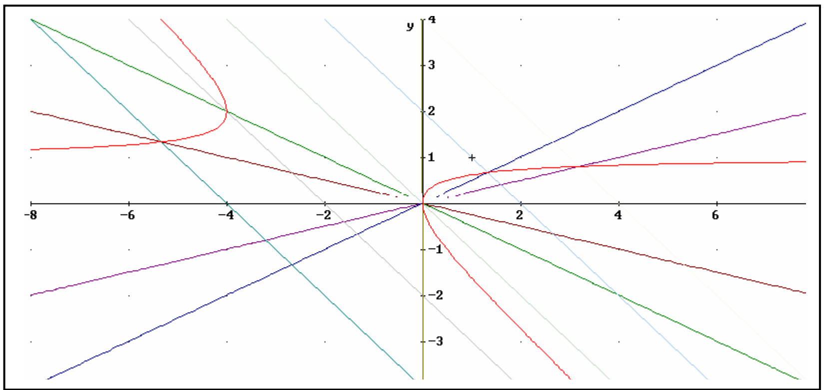
Soluzione

Sia *a* un numero reale non nullo.

Si ottiene il seguente sistema : $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0\,,\, y\neq 0 \end{cases}$

Punto 1

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, le equazioni del sistema rappresentano due fasci di rette.
La prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele alla bisettrice del 2^0 e 4^0 quadrante non passanti per l'origine, la seconda un fascio di rette passanti per l'origine (vedi figura).
Il sistema descrive geometricamente al variare del parametro *a* l'intersezione delle rette dei due fasci.



Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha una soluzione se $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a-1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$

Se a=-1 il sistema non ammette soluzioni e le due rette sono parallele e distinte.

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Se $a \neq -1$ il sistema ammette una sola soluzione $\left(-\dfrac{a^2}{1+a} ; -\dfrac{a}{1+a} \right)$

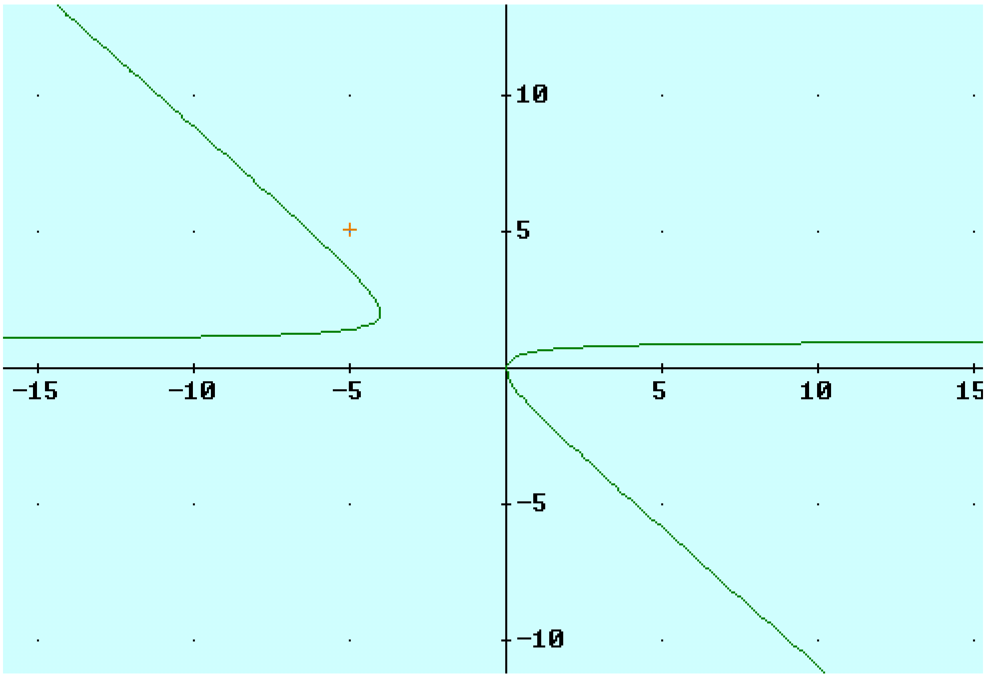
Punto 2

Per trovare l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x,y) che soddisfano al problema, si deve eliminare il parametro *a* dalle due equazioni

$$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{x}{y} \Rightarrow y^2+xy-x=0 \quad (con \quad y\neq 0)$$

$$quindi \qquad \gamma : x=\frac{y^2}{1-y} \quad con \quad y\neq 0)$$

γ rappresenta una conica ed esattamente un'iperbole.



$$\gamma : y^2+xy-x=0$$

Punto 3

L'equazione della curva γ' simmetrica della curva γ, rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (y=x), si ottiene applicando la trasformazione $\begin{cases} x\rightarrow y \\ y\rightarrow x \end{cases}$

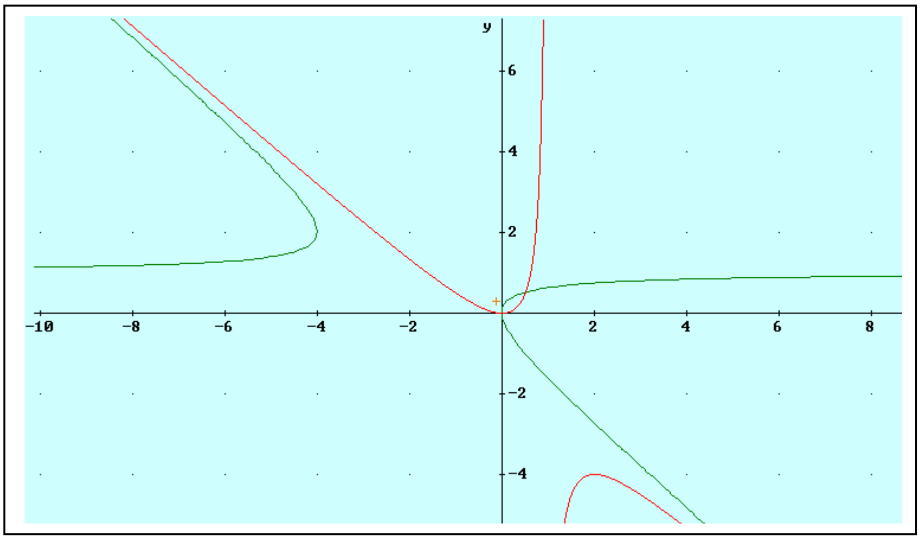
Scambiando tra loro le variabili x e y si ottiene:

$$\gamma : x=\frac{y^2}{1-y} \rightarrow \gamma' : y=\frac{x^2}{1-x}$$

Conviene rappresentare prima il grafico di γ'e poi ottenere per simmetria il grafico di γ

Si potrebbe studiare la funzione in due modi:

a) con i metodi dell'analisi matematica



$\gamma': y = \dfrac{x^2}{1-x}$

Dominio $D_f = \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

Studio del segno

$\dfrac{x^2}{1-x} > 0$

f(x)>0 per x<1

f(x)<0 per x>1

Limiti

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{1-x} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x} = +\infty$

Quindi la retta x=1 è l'asintoto verticale.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x - x^2} = -1 \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = -1$$

pertanto la retta y=-x-1 è asintoto obliquo.

Eventuali estremi relativi si ottengono dallo studio della derivata prima

$f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2}$ f'(x)≥0 $\Rightarrow$ x(2-x)≥0, infatti il denominare è sempre positivo perché è un quadrato. Si ha quindi un punto di massimo in M(2;-4).

Il punto O(0;0), non è un punto di minimo perché la funzione non è definita in tale punto.

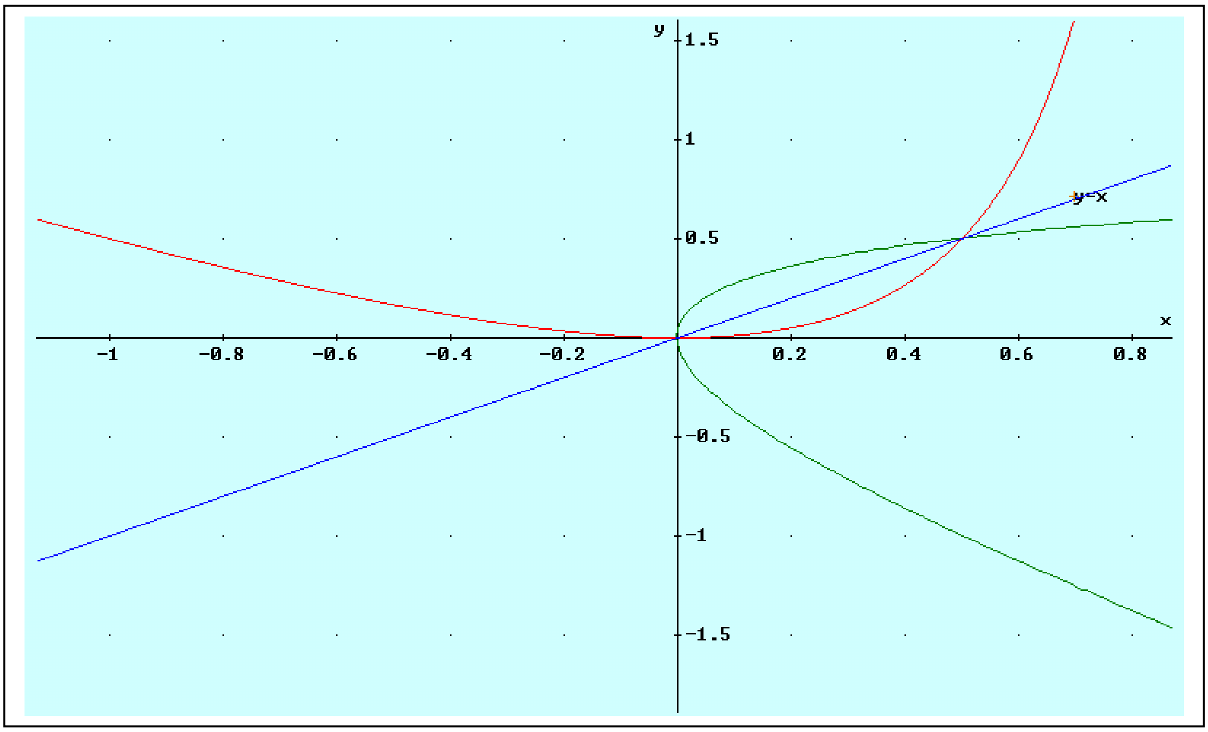
b) con i metodi della geometria analitica

La funzione rappresenta un'iperbole equilatera con asintoto verticale x=1 e asintoto obliquo y=-x-1. Il centro di simmetria è il punto di intersezione tra i due asintoti C(1,-2). Infine la funzione presenta un minimo nel punto O(0;0) e un punto di massimo nel punto M(2;-4)

Il grafico della curva γ' è il simmetrico di rispetto γ alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Punto 4

Essendo la regione di piano delimitata da γ' e da γ simmetrica rispetto alla bisettrice y =x per calcolare l'area di tale regione, basta calcolare il doppio dell'area compresa fra la bisettrice *y =x e* γ'.



Per determinare gli estremi di integrazione risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{x^2}{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{x^2}{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x - 2x^2 = 0 \end{cases} \quad da \quad cui$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 \equiv O(0;0) \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$$

Quindi l'area richiesta è data dal seguente integrale:

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= 2\left[x^2 + x + \ln|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \ln 4 \approx 0{,}1137$$

I metodi di integrazione numerica più noti, che consentono di calcolare un valore approssimato dell'area sono:

- il metodo di *quadratura dei rettangoli*
- il metodo dei *trapezi*
- il metodo di *Cavalieri-Simpson*

Metodo di quadratura dei rettangoli

Questo metodo si basa sulla formula:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \dots\dots + y_{n-1}\right)$$

Per il calcolo approssimato di $\int_0^{1/2}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

dividendo l'intervallo $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ prima in n=10 parti uguali e poi in n=20 parti uguali si otterrà

n	X	$y = 2x+1+\frac{1}{x-1}$
0	0	0
1	0,05	0,047368421
2	0,1	0,088888889
3	0,15	0,123529412
4	0,2	0,15
5	0,25	0,166666667
6	0,3	0,171428571
7	0,35	0,161538462
8	0,4	0,133333333
9	0,45	0,081818182
10	0,5	0
	Somma=	1,124571936

S=0,056228597

Area= 0,112457194

n	X	$y = 2x+1+\frac{1}{x-1}$
0	0	0
1	0,025	0,024358974
2	0,05	0,047368421
3	0,075	0,068918919
4	0,1	0,088888889
5	0,125	0,107142857
6	0,15	0,123529412
7	0,175	0,137878788
8	0,2	0,15
9	0,225	0,159677419
10	0,25	0,166666667
11	0,275	0,170689655
12	0,3	0,171428571
13	0,325	0,168518519
14	0,35	0,161538462
15	0,375	0,15
16	0,4	0,133333333
17	0,425	0,110869565
18	0,45	0,081818182
19	0,475	0,045238095
20	0,5	0
	Somma=	2,267864728

S= 0,056696618

Area=**0,113393236**

Metodo di Cavalieri-Simpson

Questo metodo utilizza la formula:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ...) + 4(y_1 + y_3 + ...)\right)$ per il calcolo approssimato di $\int_0^{1/2}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

dividendo l'intervallo $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ in n=10 parti uguali si otterrà

n pari	X	$y=2x+1+\frac{1}{x-1}$	n dispari	X	$y=2x+1+\frac{1}{x-1}$
0	0	0	0	0	0
	0,05		1	0,05	0,047368421
2	0,1	0,088888889		0,1	
	0,15		3	0,15	0,123529412
4	0,2	0,15		0,2	
	0,25		5	0,25	0,166666667
6	0,3	0,171428571		0,3	
	0,35		7	0,35	0,161538462
8	0,4	0,133333333		0,4	
	0,45		9	0,45	0,081818182
10	0,5	0		0,5	
	Somma Pari =	0,543650794		Somma Dispari =	0,580921143

$2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10}) = 1{,}087301587$
$4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) = 2{,}323684571$
Area = 0,113699539

<u>Punto 5</u>

Ponendo x=1 nell'equazione implicita del luogo

$$\gamma : y^2 + xy - x = 0$$

Si ottiene

$$y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

scartando la soluzione negativa si ha $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ che rappresenta il rapporto aureo.

Y è quindi la sezione aurea di x, quando x=1.