

## Maturità Scientifica PNI Sessione ordinaria 2001-2002

**Problema 2**

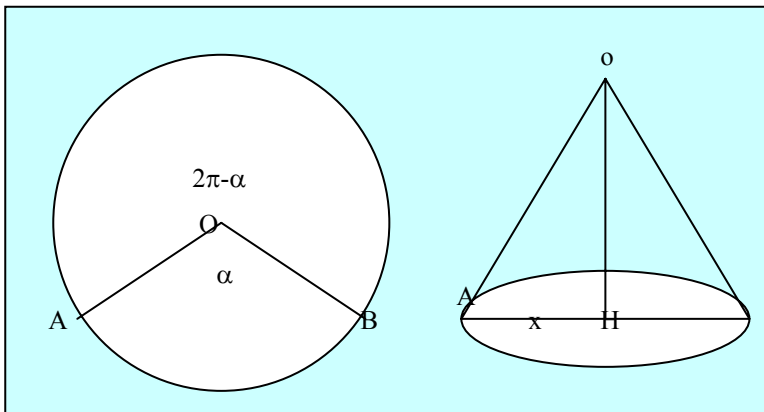
I raggi  $OA = OB = 1$  metro tagliano il cerchio di centro  $O$  in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

- 1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono  $C$  di volume massimo, il valore  $V$  di tale volume massimo e il valore  $V'$  assunto in questo caso dal volume del secondo cono  $C'$ ;
- 2) la capacità complessiva, espressa in litri, di  $C$  e di  $C'$ ;
- 3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono  $C$ , specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

**Soluzione****Punto 1**

I raggi  $OA = OB = 1$  metro tagliano il cerchio di centro  $O$  in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto. Sia  $\widehat{AOB}$  il settore circolare con angolo al centro  $\alpha$ , esso costituisce lo sviluppo della superficie del cono  $V$ . Il corrispondente arco  $\alpha$  è la circonferenza di base del cono, mentre  $OA$  è l'apotema del cono.



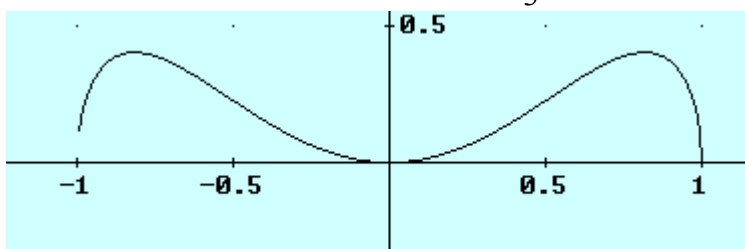
L'ampiezza dei due settori sono  $\alpha$  e  $2\pi - \alpha$  e sono anche le misure lineari dei corrispondenti archi poiché il raggio del cerchio è unitario. Ricorda infatti che la misura di un arco di circonferenza è data dal prodotto della misura, in radianti, del corrispondente angolo al centro per la misura del raggio.

Indicando con  $x$  il raggio  $AH$  della base del cono ( $0 < x < 1$ ) e applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $AHO$  si ottiene  $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{1 - x^2}$

La superficie di base  $S_b$ , del cono è  $S_b = \pi x^2$

Il volume del cono è dato da  $V = \frac{1}{3} S_b \cdot OH = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$

Ponendo  $V = y$  si ottiene la funzione  $y = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$  definita nell'intervallo  $(-1, 1)$ .



Affinché il problema abbia senso, dal punto di vista geometrico, bisogna limitare lo studio della funzione all'intervallo (0,1).

Per ottenere il massimo di questa funzione, calcoliamo la derivata prima

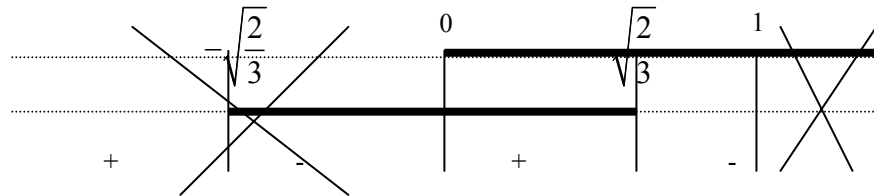
$$y' = \frac{1}{3}\pi \left[ 2x \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1}{3}\pi \frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Studiando il segno della derivata si ottiene

$$x(2-3x^2) \geq 0$$

$$\sqrt{1-x^2} > 0 \quad \forall x$$

In definitiva



$$y' > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y' = 0 \rightarrow x = 0, \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y' < 0 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$$

Quindi nell'intervallo (0,1) la funzione presenta un massimo nel punto di ascissa  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Il volume massimo del cono è:  $V_{\max} = \frac{\pi}{3} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{1 - \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2} = \frac{2\pi}{9} \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,4031m^3$ .

Di conseguenza il valore dell'angolo  $\alpha$  corrispondente al volume massimo del cono vale

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 5,1302rad$$

La lunghezza dell'arco corrispondente è  $l \approx 5,1302m$ .

Essendo l'area del settore circolare proporzionale all'arco che lo sottende si ha

$$A_{Settore} : A_{Cerchio} = \alpha : 2\pi \Rightarrow A_{Settore} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A_{Cerchio}$$

$$\text{quindi } A_{Settore} = 2,5651m^2$$

Il rapporto tra l'area del settore circolare e l'area del cerchio vale  $\frac{A_{Settore}}{A_{Cerchio}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,8165$

Cioè l'area del settore è l'81,65% dell'area del cerchio.

Il settore circolare del secondo cono C'ha angolo al centro  $\alpha' = 2\pi - \alpha$ ,

$$\alpha' = 2\pi - \alpha = 2\pi - 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

quindi il raggio di base del secondo cono è  $r' = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$

e il volume corrispondente vale  $V' = \frac{\pi}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \approx 0,0347m^3$ .

**Punto 2**

Siccome l'unità di misura assegnata è il metro, i volumi trovati sono espressi in m<sup>3</sup>. Per esprimerli in litri bisogna tenere conto che 1 lt corrisponde a 1dm<sup>3</sup>. 1m<sup>3</sup> = 10<sup>3</sup> dm<sup>3</sup> = 1000lt.

Si ottiene

$$V = 0,4031 m^3 = 403,1 l$$

$$V' = 0,0347 m^3 = 34,7 l$$

E quindi la capacità totale è c=437,81 lt.

**Punto 3**

L'angolo di apertura  $\gamma$  del cono è l'angolo che le generatrici formano con l'asse di simmetria del cono. Considerando il triangolo rettangolo formato dal raggio di base, l'apotema ed l'altezza del cono si ha

$$\text{sen } \gamma = \frac{AH}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\gamma = \text{arcsen} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,9553 \text{ rad} \approx 54,73561 \approx 54^{\circ}44'$$

Il valore è stato calcolato usando la calcolatrice.

Per trovare un'approssimazione usiamo il metodo numerico di bisezione (o dicotomico).

Si deve risolvere l'equazione  $\text{sen} x - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$

Si ha che x è compreso tra 45°è e 60°, infatti

$$\text{sen}45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707 < \text{sen } x = \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 0,816 < \text{sen}60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$$

Cerchiamo un'approssimazione a meno di un centesimo

N° Bisezioni	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)	b-a	b-a<0,01
	45	60	52,5	-0,109393299	0,049513628	-0,023159205	15	no
1	52,5	60	56,25	-0,02314674	0,049513628	0,014957346	7,5	no
2	52,5	56,25	54,375	-0,02314674	0,014957346	-0,003665748	3,75	no
3	54,375	56,25	55,3125	-0,003653395	0,014957346	0,005755863	1,875	no
4	54,375	55,3125	54,84375	-0,003653395	0,005755863	0,001072417	0,9375	no
5	54,375	54,8438	54,6094	-0,003653395	0,00107292	-0,001289592	0,4688	no
6	54,6094	54,8438	54,7266	-0,001277258	0,00107292	-0,000106628	0,2344	no
7	54,7266	54,8438	54,7852	-9,43027E-05	0,00107292	0,000483573	0,1172	no
8	54,7266	54,7852	54,7559	-9,43027E-05	0,000483573	0,000188579	0,0586	no
9	54,7266	54,7559	54,74125	-9,43027E-05	0,000188579	4,10022E-05	0,0293	no
10	54,7266	54,7412	<b>54,7339</b>	-9,43027E-05	4,04984E-05	-3,30583E-05	0,0146	no
	<b>54,7339</b>	<b>54,7412</b>		-2,07334E-05	4,04984E-05	-0,8165	0,0073	si

Un'approssimazione per difetto è x=54,73339°

Un'approssimazione per eccesso è x=54,7412°