Questionario

Quesito 1

Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

Soluzione

La media aritmetica dei due numeri positivi a e b è data da $M_A = \frac{a+b}{2}$

La media geometrica è data da $M_G = \sqrt{a \cdot b}$

La media aritmetica di due numeri positivi è maggiore della media geometrica se a ≠ b; le due medie sono uguali se a = b. Cioè si ha $M_A \geq M_G$

Infatti $M_A \geq M_G \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$

Elevando entrambi i membri al quadrato si ottiene

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (a \cdot b) \rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Ciò è sempre vero per ogni valore di a e b.

In generale, data n numeri positivi, a_1 ,a_2 , a_3 ,…a_n,

la media aritmetica è $M_A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{2}$,

la media geometrica è $M_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$

Quesito 2

Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré (1610 - 1685)*, amico di *Blaise Pascal*: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”

Soluzione

Consideriamo l’evento E =”ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado”.

L’evento contrario è: $\bar{E}$ = ”non ottenere mai 1 con 4 lanci di un solo dado “

La probabilità che l’evento $\bar{E}$ si verifichi è $\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$, di conseguenza

$$p(E) = 1 - p\left(\bar{E}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,5178 = 51,78\%$$

Consideriamo l’evento A=”ottenere almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi “

L’evento contrario è $\bar{A}$ = ”non ottenere mai un doppio 1 con 24 lanci di due dadi “

La probabilità di non ottenere un doppio 1 lanciando due dadi è $\frac{35}{36}$, la probabilità che ciò non si verifichi per 24 lanci è $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Di conseguenza la probabilità che l’evento A si verifichi è

$p(A) = 1 - p\left(\bar{A}\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,4914 = 49,14\%$.

In conclusione p(E)>p(A).

Quesito 3

Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

Soluzione

Consideriamo l'evento E = "tutte le partite del totocalcio, eccetto una, terminano in parità".

La probabilità che una partita termini in parità è uguale a $\frac{1}{3}$.

La probabilità che dodici partite terminino in parità è uguale a $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

La probabilità che una partita non termini in parità è uguale a $\frac{2}{3}$.

La probabilità che una sola partita, delle tredici, non termini in parità è uguale a $13 \cdot \frac{2}{3}$.

Quindi la probabilità che l'evento E si verifichi è data da

$$p(E) = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot 13 \cdot \frac{2}{3} \cong \left(1,8817 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 13 \cdot \left(6,6667 \cdot 10\right)^{-1} \cong 1,6308 \cdot 10^{-5} = 0,0016\%$$

Quesito 4

Calcolare $\lim_{n \mapsto \infty} \frac{3^n}{n!}$

Soluzione

Applicando il criterio del rapporto alla successione di termine generale $a_n = \frac{3^n}{n!}$ si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{(n)!}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n \cdot 3}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Quindi la successione converge a zero

Quesito 5

Cosa si intende per "*funzione periodica*"? Qual è il *periodo* di $f(x) = -sen\,\frac{\pi x}{3}$?

Quale quello di *sen2x?*

Soluzione

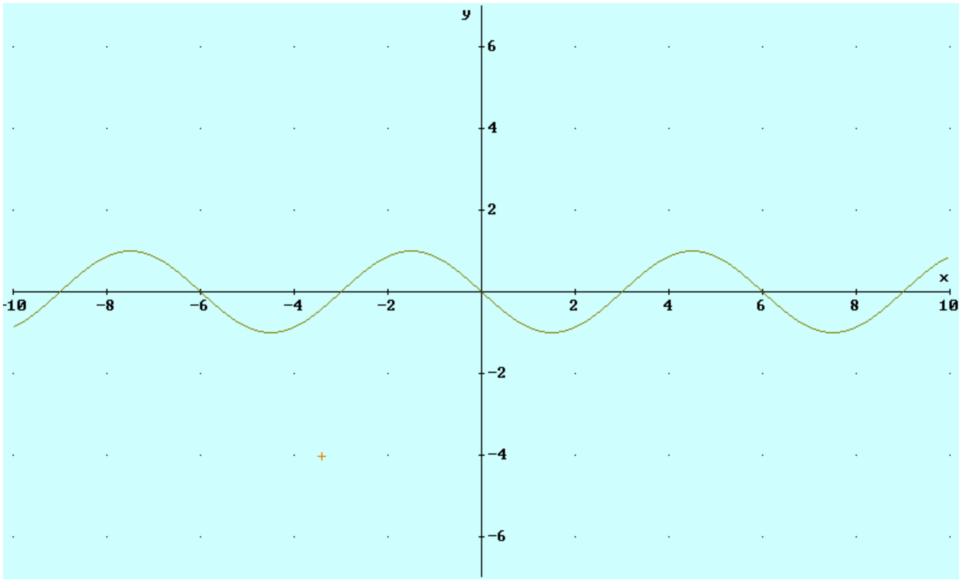
Una funzione y=f(x) si dice periodica di periodo T se, per ogni x appartenente al dominio della funzione si ha f(x+T)=f(x).

Per determinare il periodo delle funzioni assegnate, usando l'uguaglianza precedente, si procede nel seguente modo:

$$-sen\frac{\pi x}{3} = -sen\frac{\pi(x+T)}{3} = -sen\frac{\pi x+\pi T}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi T}{3} = \frac{\pi x}{3}+2k\pi \Rightarrow T = \frac{6k\pi}{\pi} = 6k$$

$$per \quad k=1 \quad T=6$$

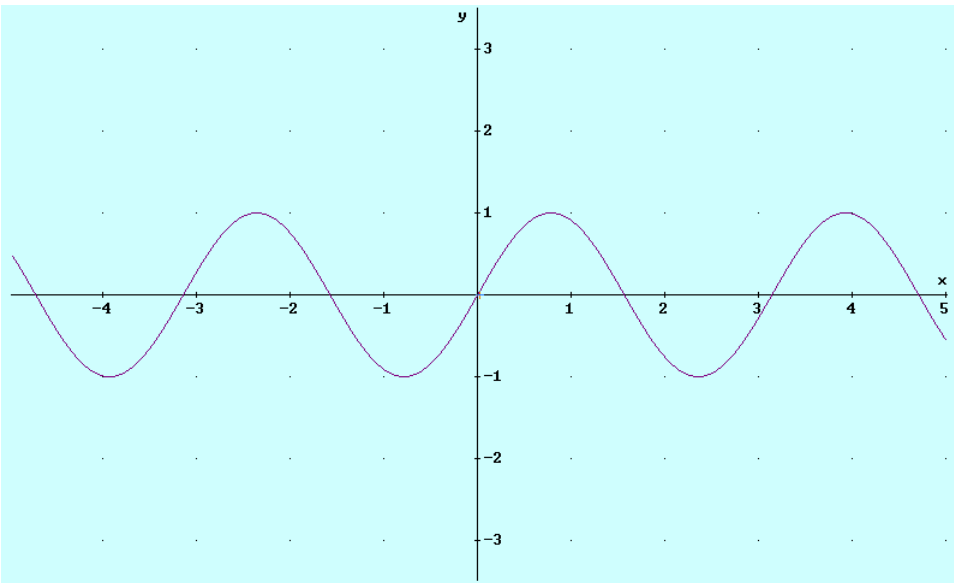


Procedendo in modo analogo per la seconda funzione si trova:

$$sen2x = sen2(x+T) = -sen(2x+2T) \Rightarrow$$

$$2T = 2k\pi$$

$$per \quad k=1 \quad T=\pi$$



<u>Quesito 6</u>

Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p, q \in \Re$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

Soluzione

Teorema di Rolle
Data una funzione reale di variabile reale y = f(x), definita nell'intervallo chiuso e limitato [a, b],
se la funzione soddisfa le ipotesi :
1. è continua in [a, b]
2. è derivabile in (a, b)
3. f(a)=f(b)
segue la tesi:
esiste un numero reale c appartenente all'intervallo(a,b) tale che f'(c)=0.

Il teorema, in realtà, assicura l'esistenza di almeno un valore in cui la derivata si annulla, per cui muove in direzione opposta alla richiesta del quesito che chiede che non si superi un certo numero di soluzioni. Un modo per utilizzare il teorema di Rolle può essere il seguente.

Il polinomio proposto $f(x) = x^n + px + q$, rappresenta una funzione continua e derivabile in tutto R.

<u>Se n è pari</u>

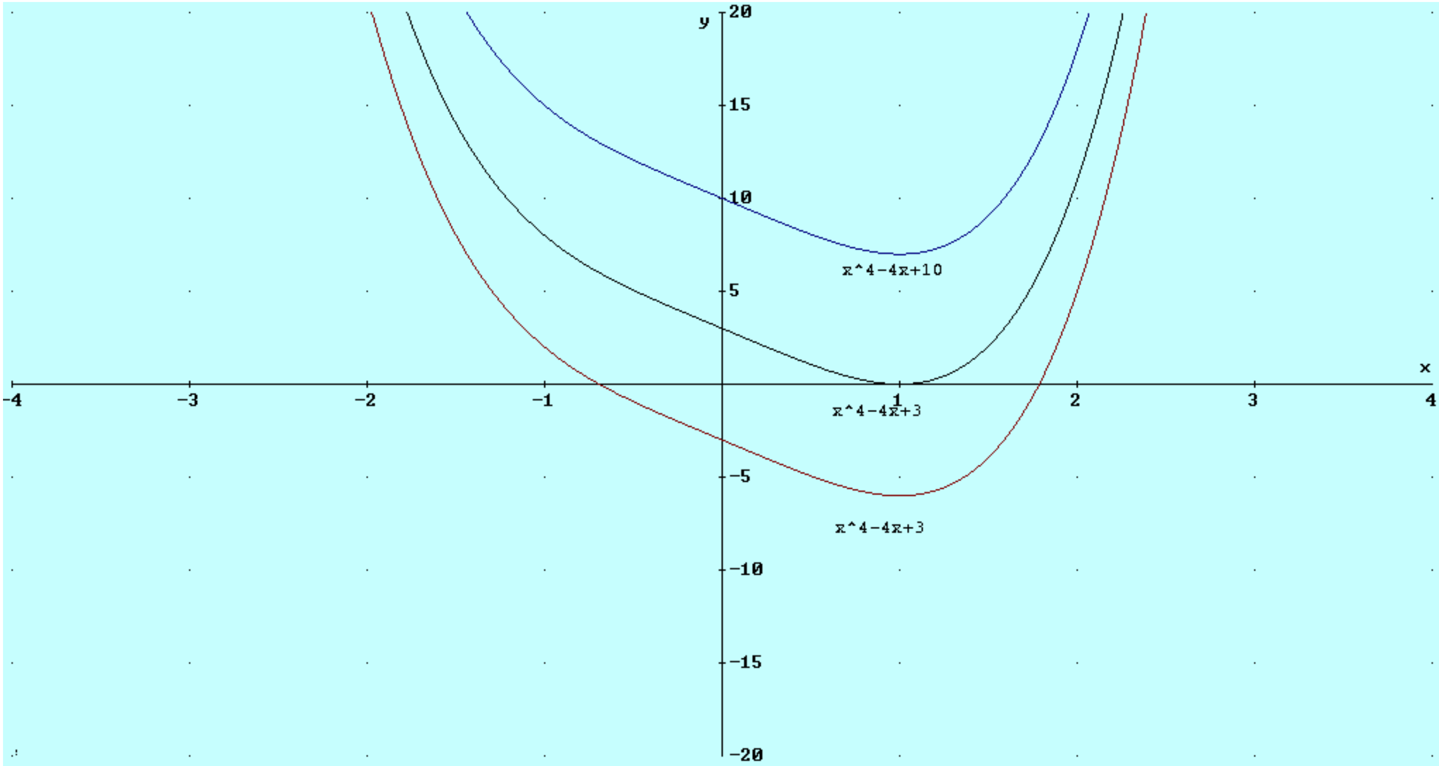
Poiché $\lim_{x\to-\infty} x^n + px + q = \lim_{x\to+\infty} x^n + px + q = +\infty$ esisteranno due numeri reali a,b, sufficientemente grandi per i quali f(a)=f(b). Questa condizione è ottenibile algebricamente ponendo per esempio f(x)=q, da cui si ricava l'equazione $x^n+px=0$ che ha per soluzioni x=0 e $x = \sqrt[n-1]{-p}$, poiché n è pari, n-1 è dispari, l'equazione ha sempre due soluzioni. Quindi sicuramente $f(0) = f(\sqrt[n-1]{-p})$, in altre parole $a = 0, \quad b = \sqrt[n-1]{-p}$ soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle, pertanto esiste un numero reale c appartenente all'intervallo (a,b) tale che f'(c)=0.

La derivata prima è $f'(x)=n\,x^{n-1} + p$, poiché n-1 è dispari esiste un solo punto a tangente orizzontale $x = \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$, questo punto è l'unico minimo per la funzione.

Se $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) < 0$ il polinomio ha due radici.

Se $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) = 0$ il polinomio ha una radice.

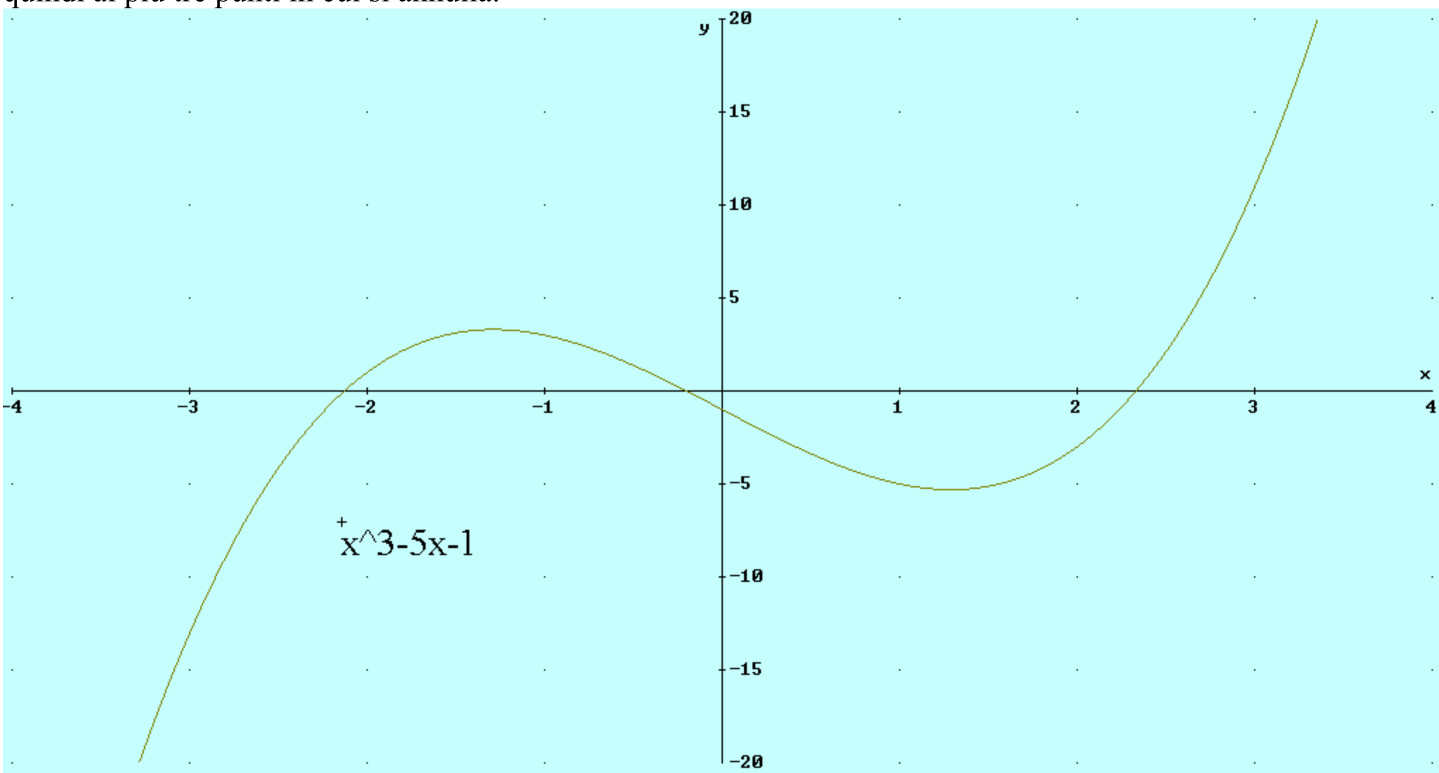
Se $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) > 0$ il polinomio non ha nessuna radice.



Se n è dispari

$\lim_{x\to-\infty} x^n + px + q = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} x^n + px + q = +\infty$

la funzione polinomiale, essendo continua, ha almeno una radice.
La sua derivata è nxn-1+p, dove n-1 è pari; per il ragionamento precedente ha al più due punti in cui si annulla. Il polinomio ha quindi al più un massimo e un minimo e quindi al più tre punti in cui si annulla.



Quesito 7

Data la funzione $f(x)=e^x - senx - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con *0<α<1* in cui la funzione si annulla.

Soluzione

Calcoliamo $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x - senx - 3x\right)$.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} senx$ non esiste, ma la funzione senx è limitata. Di conseguenza, il limite proposto vale $\lim_{x\to-\infty} e^x - senx - 3x = +\infty$

Analogamente per $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - senx - 3x\right)$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} senx$ non esiste, ma la funzione senx è limitata, di conseguenza

$\lim_{x\to+\infty} e^x - senx - 3x = +\infty$

Siccome la funzione è continua in tutto R e inoltre
f(0)=1>0
f(1)=e-sen1<0
cioè assume valori discordi agli estremi dell'intervallo [01], per il *teorema degli zeri* esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla.

Quesito 8

Verificare che la funzione $3x+\log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

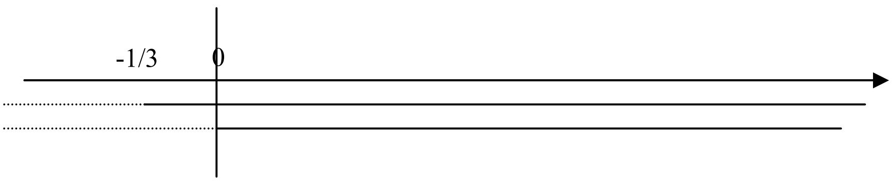
Soluzione

La funzione assegnata è definita ∀x∈D=(0;+∞)
Per verificare che la funzione f(x)=3x+log x è strettamente crescente, bisogna studiare il segno della derivata prima; se risulta f'(x)>0 la funzione è strettamente crescente.

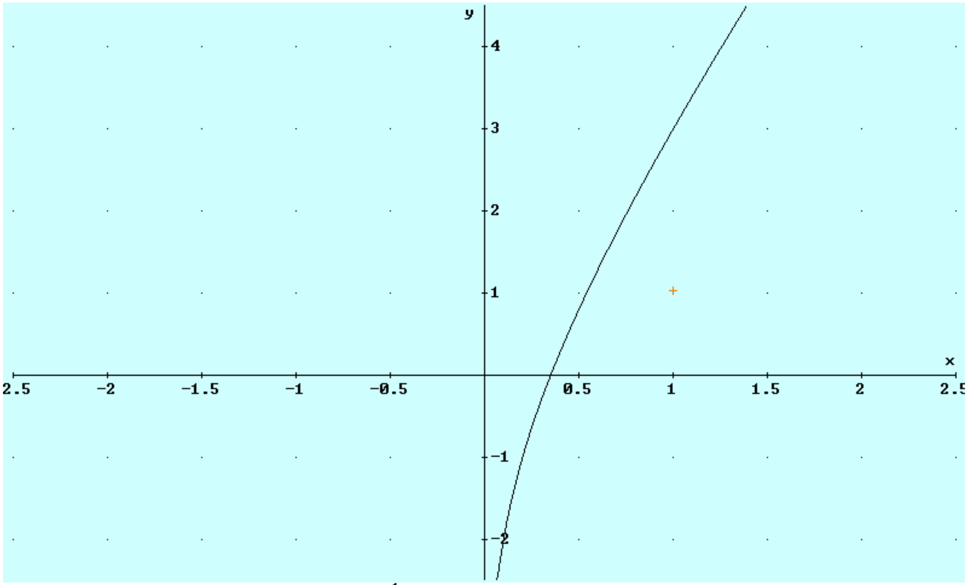
$$f'(x)=3+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow 3+\frac{1}{x}>0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x}>0$$

$$3x-1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$$

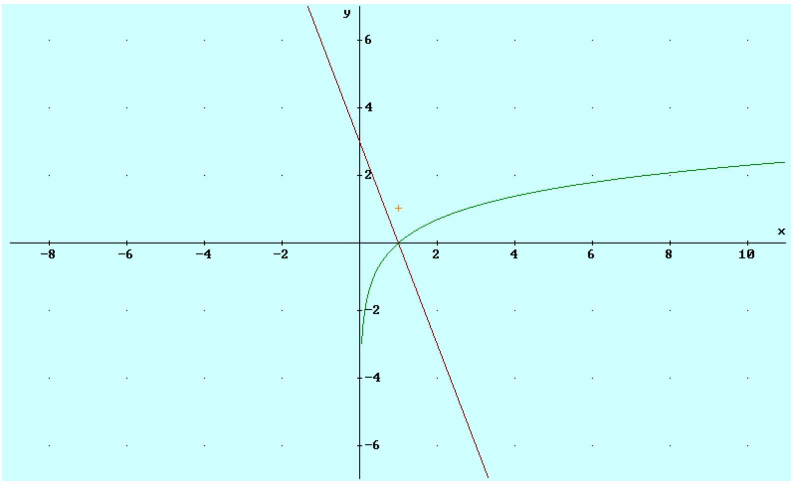


la derivata risulta positiva∀x∈D, quindi la funzione è strettamente crescente.



La funzione inversa di y=f(x) è $x=f^{-1}(y)=g(y)$.
Il valore corrispondente a y=3 si ottiene risolvendo l'equazione 3x +logx =3 .
L'unica soluzione è x=1 che si può ottenere risolvendo il seguente sistema con il metodo grafico.

$$\begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = \ln x \end{cases}$$



Per calcolare la derivata della funzione inversa nel punto x=3, usiamo il teorema di derivazione delle funzioni inverse:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si ottiene $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$.

Quesito 9

Trovare *f(4)* sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$

Soluzione

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, alla funzione integrale F(x)= x cosπx si ha f(x) = F'(x) = cosπx- πx senπx
Dalla condizione F'(4)=f(4) si ha cosπ4- π4 senπ4 =f(4), da cui f(4)= 1.

<u>Quesito 10</u>
Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Soluzione
Si chiama *omotetia* di centro O e rapporto h con h diverso da zero, la trasformazione del piano che associa, ad ogni punto P(x,y) il punto P'(x',y') tale che $\overrightarrow{OP'} = h\ \overrightarrow{OP}$

L'equazioni di un'*omotetia* sono $\begin{cases} x' = hx \\ y' = hy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{h}x' \\ y = \dfrac{1}{h}y' \end{cases}$

Una similitudine è la composizione di un'*omotetia* e di una isometria, in un ordine qualsiasi.
Il rapporto di similitudine R è uguale al valore assoluto |h| del rapporto di omotetia.

Le equazioni di una similitudine sono del tipo
$\begin{cases} x' = ax - cy + p \\ y' = cx + ay + q \end{cases}$ *oppure* $\begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = cx - ay + q \end{cases}$
in entrambe i casi il rapporto di similitudine è $K = \sqrt{a^2 + c^2}$
Come ulteriore chiarimento possiamo dire che la similitudine è una trasformazione del piano in sé che mantiene costante il rapporto tra l'immagine di un segmento e il segmento stesso. L'omotetia è una particolare similitudine nella quale i punti corrispondenti sono allineati con un punto fisso, detto centro di omotetia.